Optimisations sous contraintes

Introduction à l'Optimisation sous Contraintes

Définitions

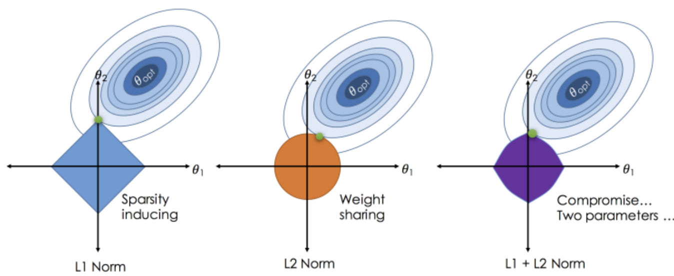
- **Fonction objectif** : La fonction à minimiser ou maximiser, notée $J(\theta)$, où θ est un vecteur de paramètres.
- **Contraintes** : Elles peuvent être de deux types : **contraintes d'égalité** ou **contraintes d'inégalité**.

Exemples

1. **Régression parcimonieuse** (sparse regression) :

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - x_i^\top \theta)^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\theta\|_p \leq k$$

où l'objectif est de minimiser l'erreur quadratique tout en imposant une parcimonie de θ.
Un modèle est dit "parcimonieux" lorsqu'une grande partie de ses paramètres sont égaux à zéro.



2. **Localisation de la caserne de pompiers** :

$$\min_{\theta} \max_{i=1,\ldots,n} \|\theta - z_i\|_2$$

où l'objectif est de minimiser la distance maximale entre la caserne et la maison la plus éloignée.

Formulation du Problème d'Optimisation sous Contraintes

Problème Primal

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^d} J(\theta) \quad \text{s.t.} \quad f_i(\theta) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad g_j(\theta) \leq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

- $f_i(\theta)$: Contraintes d'égalité.
- $g_j(\theta)$: Contraintes d'inégalité.

Solution Faisable et Optimale

Une solution faisable est un point θ qui satisfait toutes les contraintes. Une solution optimale globale θ^* satisfait

$$J(\theta^*) \leq J(\theta) \quad \text{pour tout} \quad \theta \in \Omega(\theta).$$

Concept de Lagrangien

Le **Lagrangien** transforme le problème en intégrant les contraintes dans la fonction objectif avec des multiplicateurs de Lagrange.

Lagrangien

$$L(\theta, \lambda, \mu) = J(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(\theta) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(\theta)$$

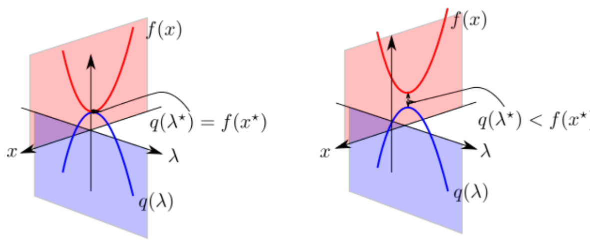
où λ_i et μ_j sont les multiplicateurs de Lagrange.

Conditions d'Optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

1. **Stationnarité** : $\nabla J(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla f_i(\theta) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\theta) = 0$.
2. **Faisabilité primale** : $f_i(\theta) = 0$ et $g_j(\theta) \leq 0$.
3. **Faisabilité duale** : $\mu_j \geq 0$. (car les contraintes d'inégalité sont orientées ($\mathrm{g}_j(\theta) \leq 0$))
4. **Complémentarité** : $\mu_j g_j(\theta) = 0$.

Dualité

- Simplification : Transformer un problème complexe en un problème dual souvent plus facile à résoudre.
- Résolution : La solution du problème dual permet souvent de retrouver celle du primal.



strong duality weak duality

Fonction Duale

La fonction duale est définie comme :

$$D(\lambda, \mu) = \inf_{\theta} L(\theta, \lambda, \mu)$$

où $L(\theta, \lambda, \mu)$ est le lagrangien du problème primal.

Problème Dual

Le problème dual consiste à maximiser la fonction duale sous les contraintes de faisabilité duale :

$$\max_{\lambda, \mu} \quad D(\lambda, \mu) \quad \text{s.t.} \quad \mu_j \geq 0, \quad \forall j.$$

Théorème de Dualité Faible

Pour tout λ et μ admissibles :

$$D(\lambda, \mu) \leq p^*$$

où p^* est la valeur optimale du problème primal.

Théorème de Dualité Forte

Si le problème primal est convexe et satisfait les conditions de Slater (les contraintes sont strictement satisfaites), alors :

$$p^* = d^*$$

où d^* est la valeur optimale du problème dual.

Problème Quadratique (QP)

Forme Standard

Un problème quadratique s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\theta \in \mathbb{R}^d} \quad & \frac{1}{2}\theta^\top G\theta + q^\top \theta + r \\ \text{sous contraintes} \quad & A\theta = b \\ & C\theta \geq d \end{aligned}$$

où G est une matrice définie positive.